

Sprężystość materiałów

(L,S)

I. Zagadnienia

1. Elementy statyki, dźwignie.
2. Naprężenia i odkształcenia ciał stałych.
3. Prawo Hooke'a.
4. Moduły sprężystości, współczynnik Poissona.
5. Wytrzymałość kości na ściskanie, rozciąganie i skręcanie.

II. Zadania

1. Pomiary strzałki ugięcia kości oraz obiektów (rurki i pręty) wyznaczonych przez asystenta.
2. Wyznaczenie modułu Younga kości i badanych materiałów.
3. Pomiar kąta skręcenia kości.
4. Wyznaczenie modułu sprężystości postaci kości i współczynnika Poissona.

III. Wykonanie ćwiczenia

1. Pomiary geometryczne kości

- Zmierzyć suwmiarką długość L dla badanej kości, tj.:
 - a) odległość pomiędzy punktami podparcia - **pomiar ugięcia**
 - b) odległość między pierścieniami, w których jest osadzona - **pomiar skręcenia** (opcjonalnie, patrz **UWAGA**, str. 4)
- Zmierzyć średnicę D w najcieńszym miejscu kości w dwóch prostopadłych kierunkach i obliczyć wartość średnią średnicy.
- Na przekroju odciętego fragmentu kości zmierzyć grubość Δr warstwy korowej w miejscach gdzie jest najcieńsza i najgrubsza i wyliczyć wartość średnią.
- Wyniki pomiarów zapisać w Tabeli 1 sprawozdania.

2. Pomiar strzałki ugięcia kości i opracowanie wyników

- Umieścić kość w leżu do pomiaru ugięcia (zgodnie z instrukcjami *Urządzenia do pomiaru sprężystości* oraz *Testing of elasticity*).
- Sprawdzić gotowość układów elektronicznych do pracy i poprawność wszystkich ustawień.
- Uruchomić program *Testing of elasticity*.
- Rozpocząć pomiar klikając przycisk **MEAS.BEGIN**. Po zakończeniu pomiaru zapisać wyniki w folderze ćwiczenia założonym na dysku sieciowym **U**:
- Otworzyć program *Statistica* i zaimportować do niego wyniki pomiarów (patrz instrukcja programu *Statistica*; zaznaczyć w oknie importu opcję **Ignore consecutive delimiters**). Utworzyć wykres zależności strzałki ugięcia kości (zmienna Var2) od działającej siły (zmienna Var1).
- Dopasować prostą $y = B_s * x + A_s$ do wyników eksperymentalnych (**lub części wykresu, dla której ugięcie wzrasta proporcjonalnie do siły**), odczytać parametry A_s [mm] i B_s [mm/N] prostej dopasowania. Wykres oraz wyniki dopasowania skopiować do sprawozdania.
- Wyniki analizy wykonane w programie *Statistica* zapisać w folderze ćwiczenia.

3. Pomiary strzałki ugięcia dla zadanych obiektów i opracowanie wyników.

- Zmierzyć przy pomocy suwmiarki średnice zewnętrzne D badanych prętów oraz średnice wewnętrzne D_w i zewnętrzne D_z rurek oraz odległość pomiędzy punktami podparcia badanych elementów (długość L). Wyniki pomiarów zapisać w Tabeli 2 sprawozdania.
- Wyniki pomiarów zapisać w folderze ćwiczenia założonym na dysku sieciowym U :
- Wyniki kolejno importować do osobnych arkuszy programu *Statistica* i postępując tak jak w punkcie 2, dokonać analizy ugięć wszystkich zadanych obiektów, a wyniki zapisać w folderze ćwiczenia i skopiować do sprawozdania.

4. Wyznaczenie modułu Younga kości i materiałów, z których wykonane są rurki.

Kość długą można w przybliżeniu potraktować jako rurkę. Siła F działająca na kość powoduje jej ugięcie, strzałkę ugięcia oznaczamy jako s . Zgodnie z prawem Hooke'a dla odkształceń sprężystych strzałka ugięcia jest liniową funkcją siły i zależy od modułu Younga E kości. Ugięcie s rurki poddanej działaniu siły F przedstawia wzór:

$$s = \frac{1}{E} \cdot \frac{1}{12\pi} \cdot \frac{L^3}{r_z^4 - r_w^4} \cdot F \quad [1]$$

gdzie: L – długość kości,
 r_w, r_z – promień wewnętrzny i zewnętrzny rurki,
 E – moduł Younga.

W pkt. 2 i 3 wykonane zostały wykresy zależności s od F i wyznaczone współczynniki regresji liniowej $B_s = \frac{s}{F}$ odpowiednio dla kości i badanej rurki. Wykorzystując te dane i wzór [1] możemy wyliczyć moduł Younga kości (i wszystkich innych obiektów tego typu) wg wzoru:

$$E = \frac{1}{B_s} \cdot \frac{1}{12\pi} \cdot \frac{L^3}{r_z^4 - r_w^4} \quad [2]$$

Na podstawie danych z Tabel 1 i 2 wyliczamy: $r_z = D/2$, $r_w = r_z - \Delta r$.

Do wyliczenia modułów Younga można wykorzystać arkusz kalkulacyjny programu *Excel*. Wyliczone wartości E wpisujemy w sprawozdaniu, wraz z opisem sposobu wykonania obliczeń.

5. Wyznaczenie modułu Younga materiałów, z których wykonane są badane pręty.

Podobnie jak to było w przypadku rurki, prawo Hooke'a obowiązuje również przy ugięciu pręta, a więc $s \sim F$, związek funkcyjny między tymi wielkościami wyrażony jest wzorem [3]:

$$s = \frac{1}{E} \cdot \frac{1}{12\pi} \cdot \frac{L^3}{r^4} \cdot F \quad [3]$$

W pkt. 3. wykonane zostały wykresy zależności s od F i wyznaczone współczynniki regresji liniowej $B_s = \frac{s}{F}$ dla wszystkich badanych obiektów z różnych materiałów. Wykorzystując te dane i wzór [3] możemy wyliczyć ich moduł Younga wg wzoru [4]:

$$E = \frac{1}{B_s} \cdot \frac{1}{12\pi} \cdot \frac{L^3}{r^4} \quad [4]$$

Obliczenia wykonujemy jak w poprzednim punkcie, a wyliczone wartości E , wraz z opisem sposobu wykonania obliczeń, wpisujemy do sprawozdania. Formułujemy wnioski wynikające z porównania wyników wszystkich pomiarów.

UWAGA:

Pomiar skręcenia kości i stosowne obliczenia (punkty 6 ÷ 8 instrukcji) można zastąpić pomiarami ugięcia dla dodatkowych obiektów (prętów, rurek) wykonanych z różnych materiałów wraz z analizą otrzymanych wyników. Proszę spytać Prowadzącego zajęcia o preferowaną opcję pomiarów.

6. Pomiar skręcenia kości (opcjonalnie).

- Postępując wg instrukcji obsługi *Urządzenia do pomiaru sprężystości* zamocować kość w uchwytach do pomiaru skręceń, przy ustawieniu ramienia dźwigni w górnej pozycji.
- Sprawdzić czy włączone jest zasilanie wszystkich urządzeń.
- Uruchomić program *Testing of elasticity* i wykonać pomiar kąta skręcenia kości. Wyniki zapisać w folderze ćwiczenia założonym na dysku sieciowym **U**:
- Zaimportować wyniki pomiarów do programu *Statistica* (analogicznie jak w punkcie 2).
- Przeliczyć otrzymane z programu wyniki pomiaru kąta wyrażone w stopniach (zmienna Var4) na radiany (przeliczenia dokonaj w nowej kolumnie (zmienna Var5)).

- Utworzyć wykres zależności kąta skręcenia kości (zmienna Var5) od działającego momentu siły (zmienna Var3).
- Dopasować prostą $y = B_\alpha \cdot x + A_\alpha$ do wyników eksperymentalnych (**lub części wykresu, dla której kąt skręcenia wzrasta proporcjonalnie do momentu siły**), odczytać parametry dopasowania prostej: A_α [rad] i B_α [$N^{-1}m^{-1}$]. Wykres oraz wyniki dopasowania skopiować do sprawozdania.
- Wyniki analizy wykonane w programie *Statistica* zapisać w folderze ćwiczenia.

7. Wyznaczenie modułu sprężystości postaci G (modułu Kirchoffa) kości (opcjonalnie).

Moment sił działających na kość powoduje jej skręcenie o kąt α . Zgodnie z prawem Hooke'a dla małych odkształceń $\alpha \sim M$ i zależy od modułu sprężystości postaci G kości. Dla rurki o długości L , średnicy zewnętrznej D i grubości ścianki Δr , kąt skręcenia można wyznaczyć ze wzoru [5]:

$$\alpha = \frac{4 \cdot M \cdot L}{\pi \cdot D^3 \cdot \Delta r \cdot G} \quad [5]$$

W punkcie 6 uzyskano wartość współczynnika regresji liniowej $B_\alpha = \frac{\alpha}{M}$.

Po przekształceniu wzoru [5] oraz wykorzystując zmierzone w punkcie 1 parametry geometryczne kości (średnie wartości Δr i D) i wyznaczony w punkcie 6 współczynnik regresji liniowej $B_\alpha = \frac{\alpha}{M}$, możemy wyliczyć wartość modułu sprężystości postaci G dla badanej kości ze wzoru [6]:

$$G = \frac{1}{B_\alpha} \frac{4 \cdot L}{\pi \cdot D^3 \cdot \Delta r} \quad [6]$$

Do wyliczenia modułu sprężystości postaci kości można wykorzystać arkusz kalkulacyjny programu Excel. Wyliczoną wartość G wpisujemy do sprawozdania.

8. Wyznaczenie współczynnika Poissona dla kości (opcjonalnie).

Znając wartości modułu Younga E i modułu sprężystości postaci G dla badanej kości możemy wyliczyć współczynnik Poissona ν wg wzoru [7]:

$$\nu = \frac{E}{2G} - 1 \quad [7]$$

Podsumowanie ćwiczenia, polega na porównaniu parametrów określających własności sprężyste materiałów i krótkiej analizie dotyczącej ich ewentualnego zastosowania w praktyce medycznej lub stomatologicznej.

IV. Sprawozdanie (szablon sprzystosc.dotx)

Sprawozdanie powinno zawierać:

1. Wykresy zależności strzałki ugięcia kości i innych zadanych do analizy obiektów od przyłożonej siły oraz wyniki dopasowania prostej.
2. Obliczenia (w przypadku korzystania z programu Excel należy je skopiować) i wyznaczone wartości modułów sprężystości E wszystkich zbadanych materiałów oraz wynikające z ich porównania wnioski.
3. Wykres zależności kąta skręcenia kości od przyłożonego momentu siły, wyniki dopasowania prostej i wyznaczony moduł sprężystości postaci G dla kości, jej współczynnik Poissona i wnioski (zależnie od wybranej opcji pomiarów).
4. Ocenę użyteczności zbadanych materiałów dla celów medycznych i stomatologicznych pod kątem ich własności sprężystych.

V. Instrukcje

1. Instrukcja obsługi *Urządzenia do pomiaru sprężystości*.
2. Instrukcja programu *Testing of elasticity*.
3. Instrukcja obsługi programu *Statistica*.